ELECTRICITE
LE CIRCUIT RC

9 Calculer la charge emmagasinée par un condensateur

| Effectuer des calculs.

Les flashs d'appareil photographique contiennent des condensateurs.
La décharge rapide du condensateur dans une lampe permet l'émission du flash.

- Déterminer la charge électrique maximale que peut stocker ce condensateur.

9 Calculer la charge emmagasinée par un condensateur

Sur la photographie, on peut lire : $C = 150\ \mu F$; $U_{max} = 200\ V$.

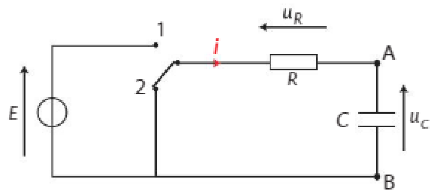
On a donc $q_{max} = C \times U_{max}$ soit :

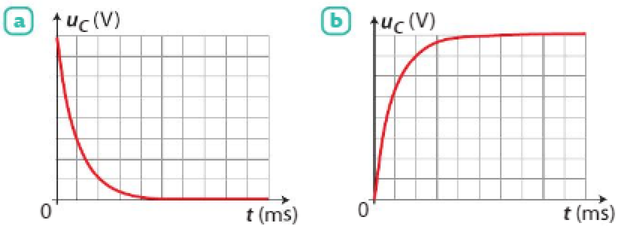
$q_{max} = 150 \times 10^{-6}\ F \times 200\ V = 3{,}00 \times 10^{-2}\ C$.

10 Différencier charge et décharge d'un condensateur

| Mobiliser et organiser ses connaissances.

- Associer, à chaque position 1 ou 2 de l'interrupteur du schéma ci-dessous, le graphique représentant la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps.





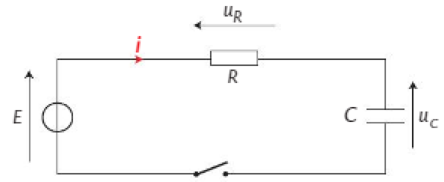
10 Différencier charge et décharge d'un condensateur

- La charge correspond au circuit pour lequel l'interrupteur est en position 1. La tension évolue aux bornes du condensateur selon le schéma b.
- La décharge correspond au circuit pour lequel l'interrupteur est en position 2. La tension évolue aux bornes du condensateur selon le schéma a.

12 Établir une équation différentielle (1)

| Effectuer un calcul.

Un condensateur préalablement déchargé est placé en série avec un conducteur ohmique. À $t = 0$ s, l'interrupteur est fermé.



1. Utiliser la loi des mailles pour établir une relation entre les tensions u_C, u_R et E.

2. Remplacer la tension u_R en utilisant la loi d'Ohm.

3. Sachant que $i = C \times \frac{du_C}{dt}$, trouver l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.

12 Établir une équation différentielle (1)

1. D'après la loi des mailles, $u_R + u_C = E$.

2. D'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$ d'où $R \times i + u_C = E$.

3. Comme $i = C \times \frac{du_C}{dt}$, on en déduit l'équation différentielle :

$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E$.

13 Établir une équation différentielle (2)

| Faire un schéma adapté.

Un circuit est constitué d'un condensateur chargé de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R.

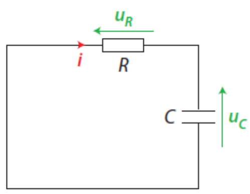
1. Représenter le circuit correspondant et flécher les tensions.

2. Établir une relation entre la tension u_C aux bornes du condensateur et la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique.

3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C.

13 Établir une équation différentielle (2)

1. Le schéma du circuit est le suivant :



2. D'après la loi des mailles, $u_R + u_C = 0$.

3. D'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$. De plus, $i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$.

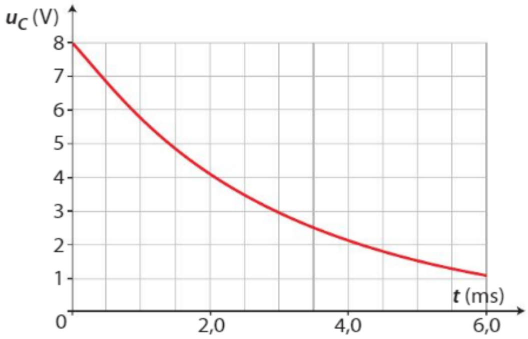
On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge :

$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$.

16 Trouver la solution d'une équation différentielle

| Exploiter un graphique.

La tension u_C aux bornes d'un condensateur est représentée ci-dessous en fonction du temps t.



Lors de la décharge d'un condensateur, cette tension a pour expression $u_C = K \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$ où K est une constante d'intégration réelle.

- Exploiter cette représentation pour déterminer K.

16 Trouver la solution d'une équation différentielle

D'après l'expression de $u_C = K \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$, on en déduit que pour $t = 0$ s, $u_C = K$. Graphiquement, on lit : $u_C(0) = K = 8{,}0$ V.

17 Calculer un temps caractéristique

CORRIGÉ

| Effectuer des calculs.

Un dipôle RC est constitué par l'association d'un condensateur de capacité $C = 47$ µF et d'un conducteur ohmique de résistance $R = 1{,}0$ kΩ.

1. Calculer le temps caractéristique de ce dipôle.

Utiliser le réflexe 3

2. À partir de la loi d'Ohm et de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$, vérifier par une analyse dimensionnelle que l'expression du temps caractéristique est homogène.

17 Calculer un temps caractéristique

1. On a $\tau = R \times C$, soit :

$\tau = 1{,}0 \times 10^3\ \Omega \times 47 \times 10^{-6}\ \text{F} = 47 \times 10^{-3}\ \text{s}$.

Le temps caractéristique est 47 ms.

2. D'après la loi d'Ohm, $u = R \times i$ donc $1\ \Omega = 1\ \text{V} \cdot \text{A}^{-1}$.

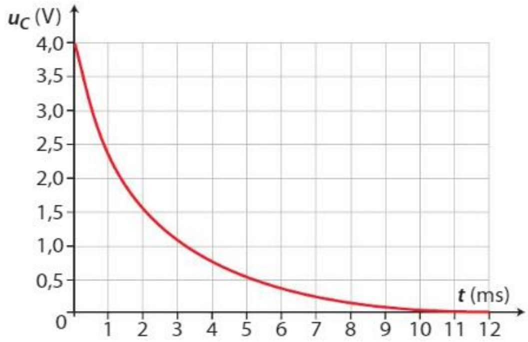
D'après la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$, on déduit : $1\ \text{F} = 1\ \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1}$.

Ainsi, le produit $R \times C$ s'exprime en : $\text{V} \cdot \text{A}^{-1} \times \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} = \text{s}$.

18 Déterminer une capacité par évaluation d'un temps caractéristique

| Exploiter un graphique.

Un condensateur de capacité C inconnue est associé à un conducteur ohmique de résistance $R = 1{,}0$ kΩ. La courbe ci-dessous représente la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps lors de sa décharge.

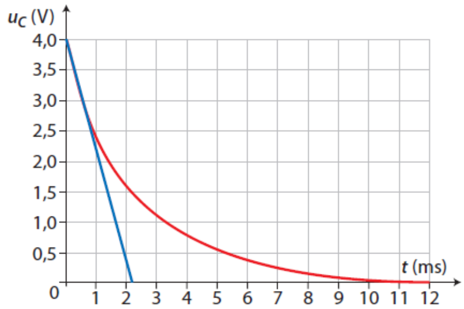


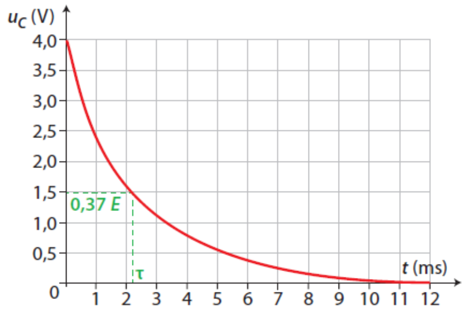
1. Déterminer graphiquement le temps caractéristique de la décharge de ce dipôle.

2. En déduire la capacité C du condensateur.

18 Déterminer une capacité par évaluation d'un temps caractéristique

1. Graphiquement, par la méthode de la tangente à l'origine, ou par détermination de t pour $u_C = 0{,}37 \times E$, soit $u_C = 0{,}37 \times 4{,}0\ \text{V} = 1{,}48$ V, on lit $\tau = 2{,}2$ ms.





2. Comme $\tau = R \times C$, on a :

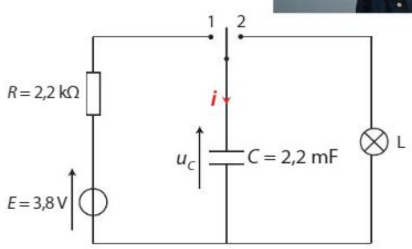
$C = \frac{\tau}{R}$ soit $C = \frac{2{,}2 \times 10^{-3}\ \text{s}}{1{,}0 \times 10^3\ \Omega} = 2{,}2 \times 10^{-6}$ F soit 2,2 µF.

19 Flash d'un appareil photographique

CORRIGÉ

| Effectuer des calculs ; exploiter un schéma ; faire un schéma adapté.

Un appareil photographique est équipé d'un flash alimenté par une batterie. Il comporte un circuit électronique dont une partie est schématisée ci-dessous.



Lors de la prise d'une photographie avec flash, le condensateur emmagasine de l'énergie fournie par la batterie pendant quelques secondes, puis la restitue dans une lampe en 0,1 s. La lampe L émet alors un éclair lumineux intense.

1. Sur quelle position faut-il placer l'interrupteur pour que le condensateur se charge ?

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur lors de sa charge.

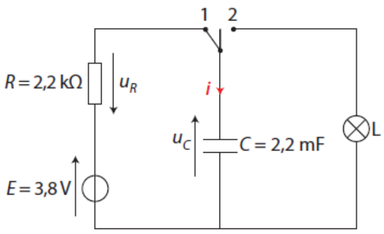
3. Résoudre l'équation différentielle et montrer que $u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ lors de la charge.

4. Schématiser le circuit correspondant à la décharge du condensateur.

5. Calculer la résistance de la lampe si la durée Δt nécessaire pour que le condensateur soit déchargé à 99 % est 0,1 s.

19 Flash d'un appareil photographique

1. Pour que le condensateur se charge, il est nécessaire de placer l'interrupteur en position 1.



2. D'après la loi des mailles : $u_R + u_C = E$.

D'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$ avec $i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$.

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge :

$$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Ce qui s'écrit aussi : $\frac{du_C}{dt} = \frac{-1}{R \times C} \times u_C + \frac{E}{R \times C}$.

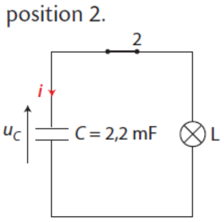
3. Les solutions d'une équation de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.

Par identification, on trouve $a = -\frac{1}{R \times C}$ et $b = \frac{E}{R \times C}$ donc $\frac{b}{a} = -E$. Donc $u_C = K \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E$.

Pour $t = 0$ s, on a $u_C = K + E = 0$ V d'après les conditions initiales.

Ainsi $K = -E$ et $u_C = -E \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

4. Le circuit correspondant à la décharge est celui pour lequel l'interrupteur est en position 2.



5. La durée nécessaire pour que le condensateur soit déchargé à 99 % est $\Delta t = 5\tau$. Ainsi :

$$\Delta t = 5R \times C \Rightarrow R = \frac{\Delta t}{5C} \text{ soit } R = \frac{0{,}1 \text{ s}}{5 \times 2{,}2 \times 10^{-3} \text{ F}} = 9\ \Omega.$$

21 Connaître les critères de réussite

CORRIGÉ

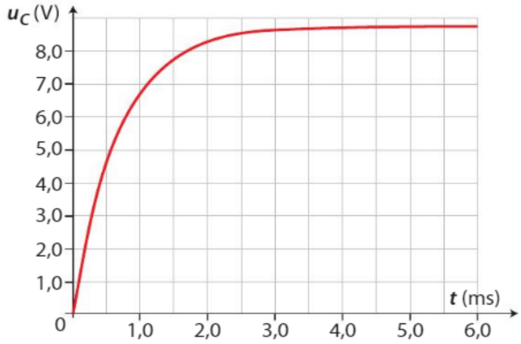
Caractéristiques d'une pile

| Exploiter un graphique ; effectuer des calculs.

On associe à un condensateur préalablement déchargé de capacité $C = 0{,}10$ mF une pile de force électromotrice E et de résistance interne r.

Dans cette situation, la tension u_C aux bornes du condensateur est donnée par : $u_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{r \times C}}\right)$.

La représentation de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps est donnée ci-dessous :



1. En considérant l'expression de la tension u_C d'une part, et la représentation graphique d'autre part, déterminer la force électromotrice E de la pile.

2. Déterminer graphiquement le temps caractéristique de la charge de ce dipôle.

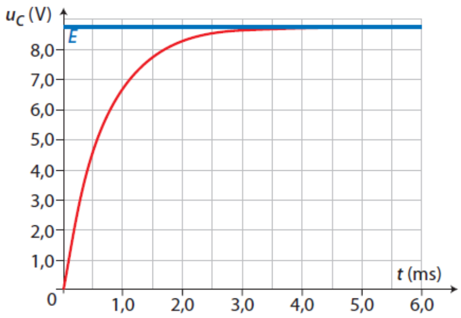
3. En déduire la résistance interne de la pile.

21 Connaître les critères de réussite
Caractéristiques d'une pile

1. Pour $t \to +\infty$, u_c tend vers $E \times \left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = E \times (1 - 0) = E$.

Graphiquement, on repère l'asymptote horizontale de la courbe lorsque t tend vers l'infini.

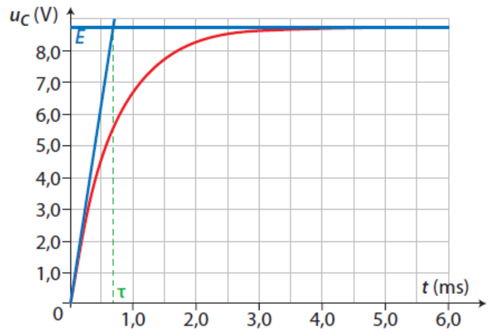
On trouve graphiquement $E = 8{,}8$ V.



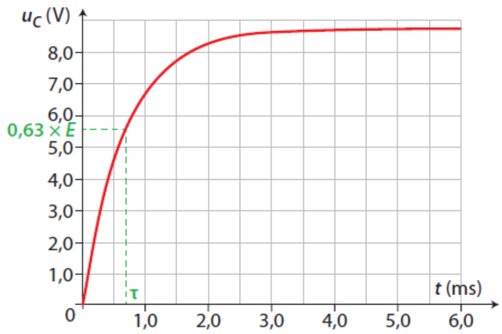
2. On retrouve graphiquement le temps caractéristique à partir de l'une des deux méthodes suivantes :

• La tangente à l'origine coupe l'asymptote d'équation $u_c = E$ pour $t = \tau$.

$\tau = r \times C \Rightarrow r = \frac{\tau}{C}$



• Pour $t = \tau$, on a $u_C = 0{,}63\ E$.



Dans les deux cas, on lit $\tau = 0{,}7$ ms.

3. Par définition $\tau = r \times C \Rightarrow r = \dfrac{\tau}{C}$

soit $r = \dfrac{0{,}7 \times 10^{-3}\ \text{s}}{0{,}10 \times 10^{-3}\ \text{F}} = 7\ \Omega$.

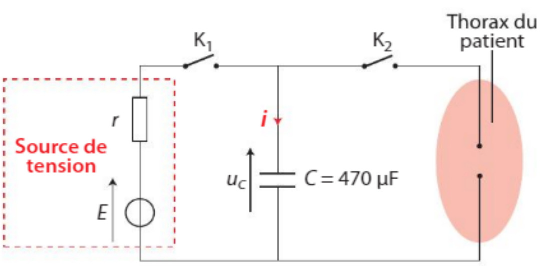
22 Le défibrillateur

| Effectuer des calculs ; exploiter un graphique.

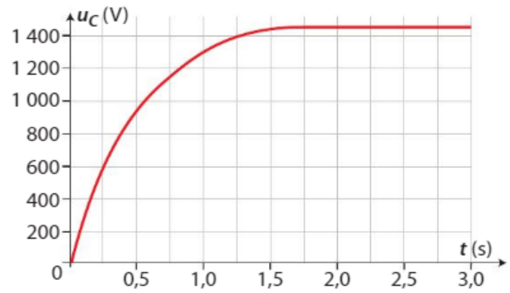
A Défibrillateur cardiaque

Un défibrillateur cardiaque permet d'appliquer un choc électrique sur le thorax d'un patient, dont les fibres musculaires du cœur se contractent de façon désordonnée (fibrillation).

B Schéma simplifié du circuit électrique d'un défibrillateur cardiaque



Avant d'appliquer le choc électrique au patient, la source de tension charge le condensateur. Le graphique ci-dessous représente la tension u_C aux bornes du condensateur au cours de cette charge en fonction du temps t.



1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur peut s'écrire :

$$r \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

2. Montrer que la solution de cette équation différentielle est $u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. En déduire graphiquement E.

3. Déterminer le temps caractéristique de cette charge.

4. En déduire la résistance interne r de la source de tension.

5. Le thorax du patient est assimilé à un conducteur ohmique de résistance $R = 50\ \Omega$. Calculer l'intensité du courant circulant dans le thorax au début de la décharge.

22 Le défibrillateur

1. Lors de la charge du condensateur, l'interrupteur K_1 est fermé. L'interrupteur K_2 est ouvert.

D'après la loi des mailles, $u_r + u_C = E$.

D'après la loi d'Ohm, $u_r = r \times i$ avec $i = \dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$.

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge : $r \times C \times \dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$.

Ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{-1}{r \times C} \times u_C + \dfrac{E}{r \times C}$.

2. Les solutions d'une équation de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.

Par identification, on trouve $a = -\dfrac{1}{r \times C}$ et $b = \dfrac{E}{r \times C}$ soit $\dfrac{b}{a} = -E$.

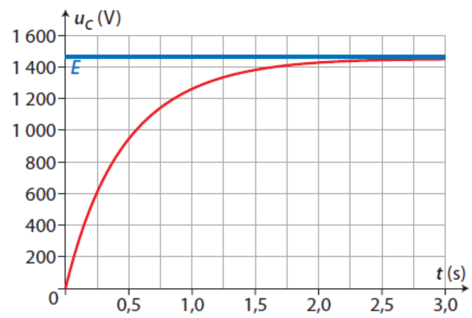
Donc $u_C = K \times e^{-\frac{t}{r \times C}} + E$.

Pour $t = 0$ s, d'après les conditions initiales, $u_C = K + E = 0$ V. Ainsi

$K = -E$ donc $u_C = -E \times e^{-\frac{t}{r \times C}} + E = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = r \times C$.

Pour $t \to \infty$, $u_C = E\left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = E(1 - 0) = E$.

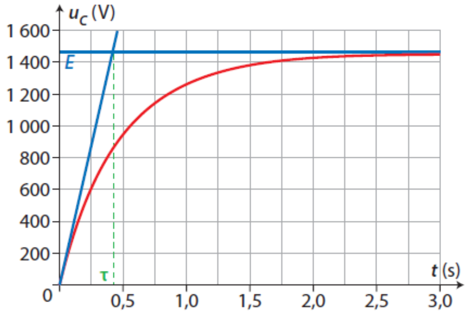
Graphiquement, on repère l'asymptote horizontale de la courbe lorsque t tend vers l'infini.



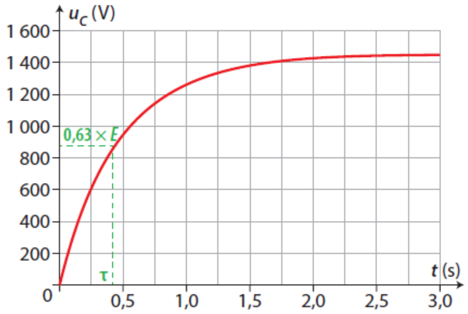
On détermine graphiquement $E = 1\ 450$ V.

3. On retrouve graphiquement le temps caractéristique à partir de l'une des deux méthodes suivantes :

• La tangente à l'origine coupe l'asymptote d'équation $u_C = E$ pour $t = \tau$.



• Pour $t = \tau$, on a $u_C = 0{,}63\ E$.



On trouve $\tau = 0{,}45$ s.

4. Par définition $\tau = r \times C \Rightarrow r = \dfrac{\tau}{C}$;

soit $r = \dfrac{0{,}45\ \text{s}}{470 \times 10^{-6}\ \text{F}} = 9{,}9 \times 10^2\ \Omega$.

5. Le thorax est assimilé à un conducteur ohmique, la tension à ses bornes vérifie la loi d'Ohm : $u_R = R \times i$.

Lors de la décharge, d'après la loi des mailles : $u_R = u_C$.

Or, au début de la décharge, $u_C = E = 1\ 450$ V.

Soit $R \times i = E$; l'intensité circulant à travers le thorax est donc :

$i = \dfrac{E}{R} = \dfrac{1\ 450\ \text{V}}{50\ \Omega} = 29\ \text{A}$.

24 Lampe rechargeable

| Faire un schéma adapté ; effectuer des calculs.

Il existe des lampes sans pile qui se rechargent quand elles sont secouées. L'énergie mécanique du mouvement est convertie en énergie électrique et stockée dans un condensateur de capacité $C = 4{,}0$ F. Une fois le condensateur chargé, la tension à ses bornes est $E = 5{,}5$ V. Un mouvement de 30 s permet à la lampe de fonctionner durant quelques minutes.

On souhaite étudier le comportement en décharge du condensateur. Pour cela, on l'associe à un conducteur ohmique de résistance $R = 220\ \Omega$, à une DEL et à un interrupteur. Le condensateur étant préalablement chargé, on ferme l'interrupteur à $t = 0$ s.

1. Schématiser le circuit électrique de décharge du condensateur sans soucis de fléchage des tensions.

2. Lorsque la DEL fonctionne, la tension à ses bornes est $u_{seuil} = 2{,}0$ V. On montre, en fléchant i et u_C dans le même sens, que la tension aux bornes du condensateur est :

$$u_C = (E - u_{seuil}) \times e^{-\frac{t}{\tau}} + u_{seuil}$$

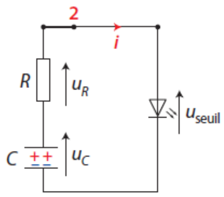
avec $i = -C \times \dfrac{du_C}{dt}$.

Déterminer l'expression de i en fonction du temps.

3. Pour fonctionner correctement, la DEL doit être traversée par un courant d'intensité supérieure à 10 mA. Quelle durée de fonctionnement Δt peut-on prévoir ?

24 Lampe rechargeable

1. Le schéma de la décharge correspond à l'instant où l'interrupteur est placé en position 2.



2. $i = -C \times \dfrac{du_C}{dt}$; en remplaçant u_C par son expression, on en déduit :

$$i = -C \times \frac{d}{dt}\left((E - u_{seuil}) \times e^{-\frac{t}{\tau}} + u_{seuil}\right)$$

$$i = -C \times \left(-\frac{1}{\tau} \times (E - u_{seuil}) \times e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

De plus $\tau = R \times C$, d'où $i = \dfrac{E - u_{seuil}}{R} \times e^{-\frac{t}{\tau}}$.

3. L'intensité $i = 10$ mA est atteinte pour une durée Δt telle que :

$$i = \frac{E - u_{seuil}}{R} \times e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \Rightarrow e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = \frac{Ri}{E - u_{seuil}}$$

d'où $\Delta t = -R \times C \times \ln\left(\dfrac{R \times i}{E - u_{seuil}}\right)$.

Application numérique :

$\Delta t = -220\ \Omega \times 4{,}0\ \text{F} \times \ln\left(\dfrac{220\ \Omega \times 10 \times 10^{-3}\ \text{A}}{5{,}5\ \text{V} - 2{,}0\ \text{V}}\right) = 4{,}1 \times 10^2\ \text{s}$

soit environ 7 minutes.

28 À chacun son rythme

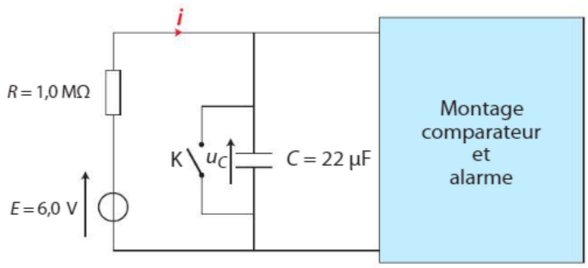
Dans 40 s, l'alarme se déclenchera...

| Extraire et organiser l'information ; effectuer des calculs ; rédiger une explication.

Commencer par résoudre l'énoncé compact. En cas de difficultés, passer à l'énoncé détaillé.

Lorsque l'utilisateur d'une alarme d'appartement rentre chez lui, après l'ouverture de la porte d'entrée, il doit disposer d'une durée suffisante pour désactiver le dispositif. Sinon, cette durée écoulée, l'alarme se déclenche.

Lorsque l'alarme est sous tension et que l'utilisateur entre, l'interrupteur K du dispositif s'ouvre, et le condensateur se charge.



Le montage comparateur mesure la tension aux bornes du condensateur et la compare à une tension de référence $u_{ref} = 5{,}0$ V. Aucun courant ne circule dans la branche de ce montage comparateur. L'alarme sonore se déclenche si $u_C > u_{ref}$.

Énoncé compact

De combien de temps l'utilisateur dispose-t-il pour désactiver l'alarme ?

Énoncé détaillé

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.

2. Montrer que la tension u_C aux bornes du condensateur vérifie : $u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

3. De combien de temps l'utilisateur dispose-t-il pour désactiver l'alarme ?

28 À chacun son rythme

Dans 40 s, l'alarme se déclenchera…

1. Déterminons l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur lorsqu'un utilisateur entre dans l'appartement. Dans ce cas, l'interrupteur K est ouvert, donc :
– d'après la loi des mailles : $u_R + u_C = E$;
– d'après la loi d'Ohm : $u_R = R \times i$ avec $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C \times \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge : $R \times C \times \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$.

Ce qui s'écrit aussi : $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{-1}{R \times C} u_C + \frac{E}{R \times C}$.

2. Les solutions d'une équation du type $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.

Par identification, on trouve $a = -\frac{1}{R \times C}$ et $b = \frac{E}{R \times C}$, donc $\frac{b}{a} = -E$.

Les solutions s'écrivent : $u_C = K \times e^{-\frac{t}{RC}} + E$.

Pour $t = 0$ s, on a $u_C = K + E = 0$ V d'après les conditions initiales (le condensateur est déchargé). Ainsi $K = -E$ et

$u_C = -E \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E$ soit $u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = R \times C$.

3. L'alarme se déclenche pour une durée $\Delta t = t_{\text{décl}} - 0$ telle que $u_C = 5{,}0$ V. Il vient alors :

$$\frac{u_C}{E} = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \Rightarrow e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = 1 - \frac{u_C}{E}$$

soit $\Delta t = -\tau \times \ln\left(1 - \frac{u_C}{E}\right)$

soit $\Delta t = -R \times C \times \ln\left(1 - \frac{u_C}{E}\right)$, donc :

$$\Delta t = -1{,}0 \times 10^6\ \Omega \times 22 \times 10^{-6}\ \mathrm{F} \times \ln\left(1 - \frac{5{,}0\ \mathrm{V}}{6{,}0\ \mathrm{V}}\right) = 39\ \mathrm{s}.$$